

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

А. М. УЛАНОВ

ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Лекции

САМАРА

2011

УДК 621.431.75 (075)

ББК 39.55

У 47

Автор: Уланов Александр Михайлович

Уланов, А. М. Основы метода конечных элементов

Рассмотрены математическая база метода конечных элементов, его основные уравнения, некоторые проблемы и особенности его применения. Учебное пособие предназначено для подготовки специалистов 2 факультета 4 курса по специальности 160301.65 «Авиационные двигатели и энергетические установки» и 160302.65 «Двигатели летательных аппаратов» (Государственный образовательный стандарт второго поколения - ГОС-2), и по специальности 160700 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей», специалистов и бакалавров (Федеральный Государственный образовательный стандарт третьего поколения - ФГОС-3).

Подготовлено на кафедре конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов СГАУ.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Элементы теории упругости.	4
1.1. Формулы Коши	4
1.2. Объемные деформации	6
1.3. Закон Гука для объемного напряженного состояния	6
2. Основные уравнения метода конечных элементов.	7
2.1. Представление формул Коши и закона Гука в матричной форме.	8
2.2. Условия в пределах конечного элемента.	8
2.3. Определение матрицы жесткости элемента	10
2.4. Определение приведенной внешней нагрузки.	13
2.5. Переход в глобальную систему координат	14
2.6. Формирование разрешающей системы линейных уравнений.	15
3. Особенности и проблемы применения метода конечных элементов	16

ВВЕДЕНИЕ

Метод конечных элементов – один из наиболее распространенных современных численных методов. Он лежит в основе таких мощных пакетов программ, как ANSYS, NASTRAN и многие другие. Он позволяет рассчитывать не только прочность, но и колебания. Методом конечных элементов можно рассчитывать задачи гидрогазодинамики и теплопередачи, причем результаты этих расчетов очень удобно передавать как данные для расчета на прочность. Можно рассчитывать детали любой формы, при любых нагрузках и закреплениях. Поэтому метод конечных элементов свободен от очень многих допущений, которые необходимы при выводе аналитических уравнений и ограничивают их точность.

Однако не следует думать, что метод конечных элементов может полностью заменить собой все другие методы расчетов. У него тоже есть свои ограничения и проблемы применения, о которых речь пойдет далее.

Основная идея метода конечных элементов (МКЭ) – аппроксимация сплошной среды с бесконечным числом точек и степеней свободы совокупностью элементов конечно малого размера, связанных между собой в узлах (рис. 1). В примере на рис. 1 разбивка детали содержит 8 конечных элементов и 10 узлов.

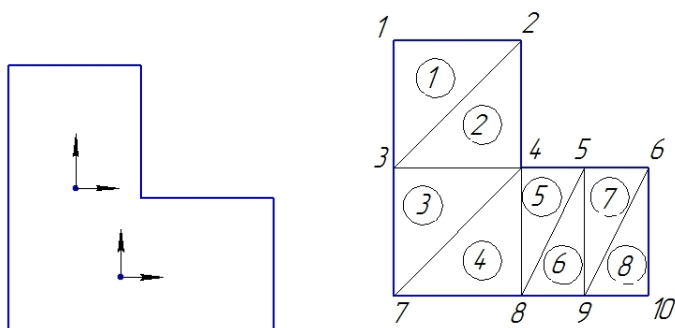


Рис. 1. Деталь до и после разбивки на конечные элементы

Существуют различные **типы конечных элементов**: балочные (отрезок балки с заданным сечением), оболочечные (треугольник или четырехугольник), твердотельные или объемные (тетраэдр, шестигранный блок, у которого грани могут быть непараллельными и различными по длине).

Не обязательно, чтобы размер элементов был одинаковым (далее мы увидим, что он скорее должен быть различным). Нумерация элементов и узлов произвольная. Однако необходимо, чтобы узлы соседних конечных элементов совпадали. Например, разбивка на рис. 2 является ошибочной, так как узел 4 элементов 1, 2, 3 не совпадает ни с одним узлом

соседнего конечного элемента 5. В этом случае невозможно согласовать деформации и напряжения в элементах 1, 2, 3 и 5.

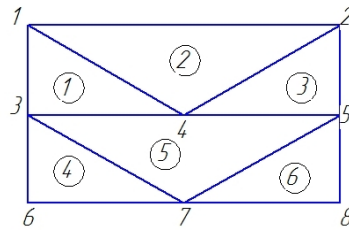


Рис. 2. Ошибочная разбивка на конечные элементы

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1.1. Формулы Коши.

Обозначим u - деформацию в направлении оси X , v - в направлении оси Y , w - в направлении оси Z . Выделим в твердом теле бесконечно малый параллелепипед с ребрами dx , dy , dz . В плоскости OXZ при деформации ребра AC и BC переходят в ребра $A'C'$ и $B'C'$. Перемещения точек показаны на рис. 3. Это дает возможность определить линейную относительную деформацию

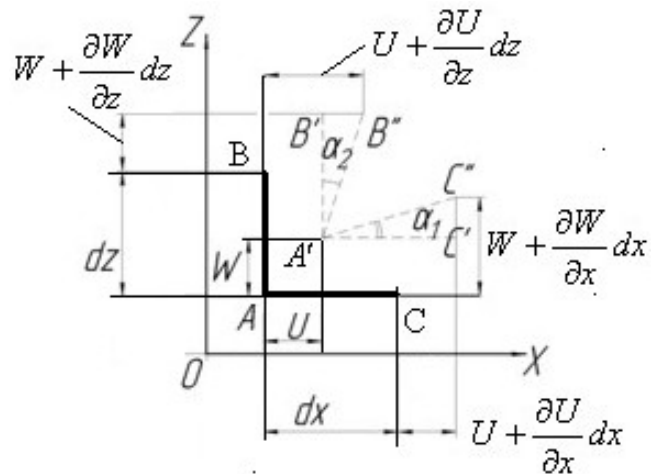


Рис.3. Перемещения в бесконечно малом элементе

$$\varepsilon_x = \frac{dx + u + \frac{\partial x dx}{\partial u} - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.1)$$

Аналогично можно получить

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.3)$$

Угловая деформация в плоскости OXZ равна сумме углов поворота ребер параллелепипеда:

$$\gamma_{zx} = \alpha_1 + \alpha_2 .$$

Предполагая, что линейные и угловые относительные деформации малы,

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{w + \frac{\partial w}{\partial x} dx - w}{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x} \approx \frac{\partial w}{\partial x} ,$$

$$\alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial z} dz - u}{dz + w + \frac{\partial w}{\partial z} dz - w} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{1 + \varepsilon_z} \approx \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\text{и } \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} . \quad (1.4)$$

Аналогично можно получить

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} , \quad (1.5)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.6)$$

Формулы (1.1) - (1.6) – это формулы Коши.

1.2. Объёмные деформации

Выделим бесконечно малый объем $dv = dx dy dz$. При деформации он переходит в объем $dv' = dx(1 + \varepsilon_x) dy(1 + \varepsilon_y) dz(1 + \varepsilon_z)$.

Относительная объёмная деформация (предполагая, что попарные произведения $\varepsilon_x \varepsilon_y$ и т.д. малы) равна

$$\Theta = \frac{dv' - dv}{dv} \approx \frac{dx dy dz + dx dy dz \varepsilon_x + dx dy dz \varepsilon_y + dx dy dz \varepsilon_z - dx dy dz}{dx dy dz} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z .$$

1.3. Закон Гука для объёмного напряженного состояния

Рассмотрим деформацию в направлении оси X:

Деформация от напряжения σ_x будет равна $\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$, где E – модуль упругости.

Деформация от напряжения σ_y будет равна $\varepsilon''_x = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$, где μ - коэффициент Пуассона.

Деформация от напряжения σ_z будет равна $\varepsilon'''_x = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$.

Температурная деформация в направлении оси X будет равна $\varepsilon_{xt} = \alpha \Delta T$,

где α - коэффициент линейного расширения, ΔT - разность температур.

Тогда полная деформация в направлении оси X равна их сумме:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) + \alpha\Delta T \quad (1.7)$$

Аналогично можно получить

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z) + \alpha\Delta T \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y) + \alpha\Delta T \quad (1.9)$$

Для угловых деформаций

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \quad (1.10)$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz} / G \quad (1.11)$$

$$\gamma_{zx} = \tau_{zx} / G \quad (1.12)$$

где $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ - модуль сдвига, τ - соответствующее касательное напряжение.

Формулы (1.7) ÷ (1.12) – это закон Гука для объёмного напряженного состояния.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Расчет конструкции на прочность при помощи МКЭ включает следующие этапы:

1. Построение геометрической модели и ее разбиение на конечные элементы.

Определение действующих нагрузок и граничных условий. Формирование конечно-элементной модели.

2. Расчет для каждого конечного элемента матрицы жесткости и вектора приведенной к узлам внешней нагрузки.

3. Формирование разрешающей системы линейных уравнений.

4. Решение полученной системы, определение перемещений, деформаций, напряжений.

5. Оценка прочности конструкции, выводы, рекомендации.

Рассмотрим плоское напряженное состояние и треугольный конечный элемент.

2.1. Представление формул Коши и закона Гука в матричной форме

Запишем формулы Коши для плоского напряженного состояния в виде:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} u + 0v, \quad \varepsilon_y = 0u + \frac{\partial}{\partial y} v, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} u + \frac{\partial}{\partial x} v.$$

Вектор деформаций $\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$, вектор перемещений $\{q\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$, дифференцирующая

матрица $L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$. Тогда формулы Коши для плоского напряженного состояния

примут вид

$$\{\varepsilon\} = [L]\{q\} \quad (2.1).$$

Для плоского напряженного состояния

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y) + \alpha T,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x) + \alpha T,$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G.$$

Умножим второе уравнение на μ и сложим с первым.

$$\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y + \mu\sigma_y - \mu^2\sigma_x) + \alpha T + \mu\alpha T,$$

откуда

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) - \frac{E}{1-\mu^2} (\alpha T + \mu\alpha T). \quad (2.2)$$

Аналогично можно получить

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) - \frac{E}{1-\mu^2} (\alpha T + \mu\alpha T) \quad (2.3)$$

Также

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}. \quad (2.4)$$

Запишем (2.2) – (2.4) в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\text{или } \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} - [D]\{\varepsilon_t\} \quad (2.5).$$

2.2. Условия в пределах конечного элемента

Пусть конструкция разбита на n_s конечных элементов, связанных между собой в n_r узлах. Введем для элемента p локальную систему координат $O^p X^p Y^p$ (рис. 4).

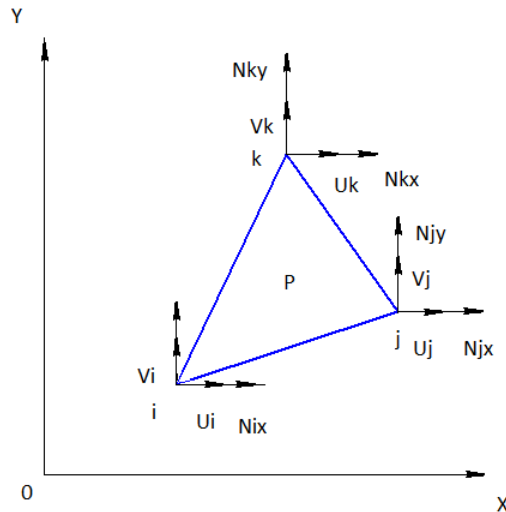


Рис. 4. Треугольный конечный элемент

В этой системе вектор перемещений узла i элемента p :

$\{q_i^p\} = \begin{Bmatrix} u_i^p \\ v_i^p \end{Bmatrix}$. Соответственно векторы перемещений узла j - $\{q_j^p\}$, узла k - $\{q_k^p\}$. Вектор

узловых перемещений всего элемента p :

$$\{q^p\} = \begin{Bmatrix} q_i^p \\ q_j^p \\ q_k^p \end{Bmatrix}.$$

Вектор реакций в узле i элемента p :

$\{N_i^p\} = \begin{Bmatrix} N_{xi}^p \\ N_{yi}^p \end{Bmatrix}$. Соответственно векторы реакций узла j - $\{N_j^p\}$, узла k - $\{N_k^p\}$. Вектор

реакций всего элемента p :

$$\{N^p\} = \begin{Bmatrix} N_i^p \\ N_j^p \\ N_k^p \end{Bmatrix}.$$

На элемент действует объемная нагрузка $\{P_V^p\} = \begin{Bmatrix} P_{xV}^p \\ P_{yV}^p \end{Bmatrix}$ и поверхностная нагрузка

$\{P_S^p\} = \begin{Bmatrix} P_{xS}^p \\ P_{yS}^p \end{Bmatrix}$. После приведения ее к узлам элемента на узел i элемента p будет

действовать внешняя нагрузка:

$\{Q_i^p\} = \begin{Bmatrix} Q_{xi}^p \\ Q_{yi}^p \end{Bmatrix}$. Соответственно векторы нагрузок на узел j - $\{Q_j^p\}$, на узел k - $\{Q_k^p\}$. Вектор

приведенной внешней нагрузки на весь элемент p :

$$\{Q^p\} = \begin{Bmatrix} Q_i^p \\ Q_j^p \\ Q_k^p \end{Bmatrix}.$$

Согласно теории упругости

$$\{N^p\} = [K^p]\{q^p\} + \{Q^p\}, \quad (2.6)$$

где $[K^p]$ - матрица жесткости элемента p .

2.3. Определение матрицы жесткости элемента

Примем закон распределения перемещений внутри элемента p . Он должен определять перемещения $\{q_c^p\}$ в любой точке C элемента, если известны ее координаты и вектор узловых перемещений $\{q^p\}$. Этот закон представлен в виде матрицы $[F^p]$.

$$\{q_c^p\} = [F^p]\{q^p\} \quad (2.7)$$

Точность вычислений сильно зависит от того, насколько принятый закон совпадает с реальным распределением перемещений. Поскольку реальное распределение неизвестно, для повышения точности необходимо уменьшать размер элементов.

С учетом (2.7) уравнение (2.1) для деформаций в точке C примет вид

$$\{\varepsilon^c\} = [L][F^p]\{q^p\} = [B^p]\{q^p\} \quad (2.8)$$

Уравнение (2.5) для напряжений в точке C примет вид

$$\{\sigma^c\} = [D^p][B^p]\{q^p\} - [D^p]\{\varepsilon_i^p\}$$

Определим потенциальную энергию деформированного элемента. Удельная энергия на единицу объема

$$W = \int_V W_e dV,$$

где W_e - удельная потенциальная энергия.

Для плоского напряженного состояния

$$W_e = \frac{1}{2}(\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}) = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}.$$

$$\text{Тогда } W = \int_V \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V ([B^p]\{q^p\})^T ([D^p][B^p]\{q^p\} - [D^p]\{\varepsilon_i^p\}) dV$$

С учетом $([B^p]\{q^p\})^T = \{q^p\}^T [B^p]^T$ и того, что вектор узловых перемещений не зависит от положения произвольной точки и его можно вынести за интеграл, получаем

$$W = \frac{1}{2}\{q^p\}^T \int_V [B^p]^T [D^p][B^p] dV \{q^p\} - \frac{1}{2}\{q^p\}^T \int_V [B^p]^T [D^p]\{\varepsilon_i^p\} dV \quad (2.9)$$

Найдем работу узловых реакций, объемных и поверхностных сил на перемещении элемента.

$$A = \frac{1}{2}\{q^p\}^T \{N^p\} + \frac{1}{2} \int_V \{q_c^p\}^T \{P_V^p\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{q_c^p\}^T \{P_S^p\} dS \quad (2.10)$$

Подставим в это уравнение вектор реакций из (2.6) и вектор перемещений произвольной точки из (2.7). Получим:

$$A = \frac{1}{2}\{q^p\}^T [K^p]\{q^p\} + \frac{1}{2}\{q^p\}^T (\{Q^p\} + \int_V [F^p]^T \{P_V^p\} dV + \int_S [F^p]^T \{P_S^p\} dS). \quad (2.11)$$

В соответствии с законом сохранения энергии работа равна потенциальной энергии, (2.9) равно (2.11).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\{q^p\}^T [K^p]\{q^p\} + \frac{1}{2}\{q^p\}^T (\{Q^p\} + \int_V [F^p]^T \{P_V^p\} dV + \int_S [F^p]^T \{P_S^p\} dS) = \\ & = \frac{1}{2}\{q^p\}^T \int_V [B^p]^T [D^p][B^p] dV \{q^p\} - \frac{1}{2}\{q^p\}^T \int_V [B^p]^T [D^p]\{\varepsilon_i^p\} dV \end{aligned}$$

Это равенство будет выполняться тождественно, если

$$[K^p] = \int_V [B^p]^T [D^p] [B^p] dV, \quad (2.12)$$

$$\{Q^p\} = - \int_V [B^p]^T [D^p] \{\varepsilon_i^p\} dV - \int_V [F^p]^T \{P_V^p\} dV - \int_S [F^p]^T \{P_S^p\} dS. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.12) позволяет рассчитать матрицу жесткости элемента. Для этого нужна функция $[F^p]$.

Разобьем элемент на три треугольника с площадями S_i^p , S_j^p , S_k^p (рис. 5).

$$S_i^p + S_j^p + S_k^p = S^p$$

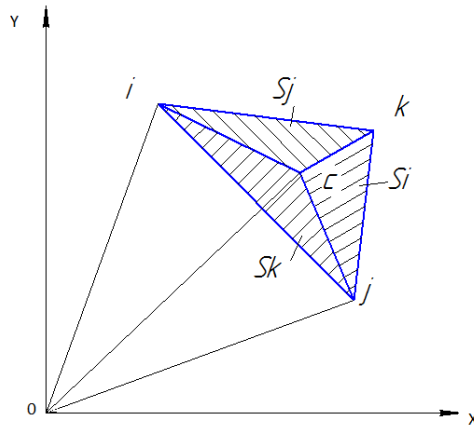


Рис. 5. Система координат, основанная на площадях треугольников

Введем в элементе систему координат

$$l_i^p = \frac{S_i^p}{S^p}, \quad l_j^p = \frac{S_j^p}{S^p}, \quad l_k^p = \frac{S_k^p}{S^p}.$$

Найдем площади через координаты узлов и произвольной точки.

Из рис. 6

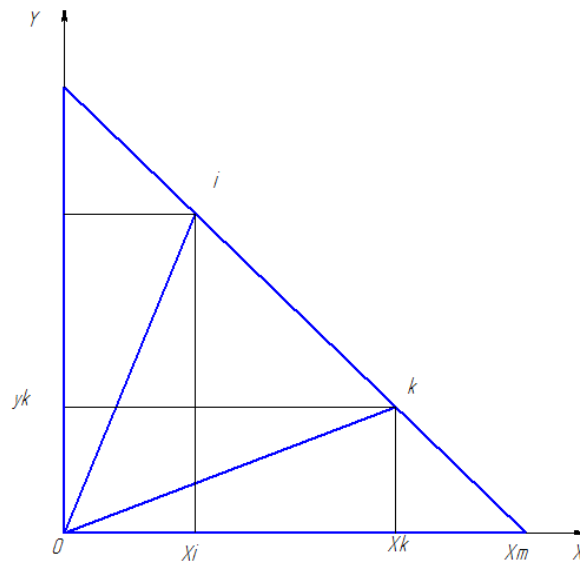


Рис. 6. Определение площади треугольника по координатам его вершин

$$S_{Oik} = S_{Oim} - S_{Okm} = \frac{1}{2} (x_m^p y_i^p - x_m^p y_k^p).$$

Из подобия треугольников

$$\frac{x_m^p - x_k^p}{x_m^p - x_i^p} = \frac{y_k^p}{y_i^p}.$$

Отсюда

$$x_m^p y_i^p - x_k^p y_i^p = x_m^p y_k^p - x_i^p y_k^p,$$

откуда

$$x_m^p y_i^p - x_m^p y_k^p = x_k^p y_i^p - x_i^p y_k^p \text{ и}$$

$$S_{Oik} = \frac{1}{2}(x_k^p y_i^p - x_i^p y_k^p).$$

Соответственно площадь

$$\begin{aligned} S_i^p &= S_{Okc} + S_{Ojk} - S_{Ojc} = \frac{1}{2}((x_k^p y^p - x^p y_k^p) + (x_j^p y_k^p - x_k^p y_j^p) - (x_j^p y^p - x^p y_j^p)) = \\ &= \frac{1}{2}((x_j^p y_k^p - x_k^p y_j^p) + (y_j^p - y_k^p)x^p - (x_k^p - x_j^p)y^p) \end{aligned}$$

Аналогично

$$S_j^p = \frac{1}{2}((x_k^p y_i^p - x_i^p y_k^p) + (y_k^p - y_i^p)x^p - (x_i^p - x_k^p)y^p)$$

$$S_k^p = \frac{1}{2}((x_i^p y_j^p - x_j^p y_i^p) + (y_i^p - y_j^p)x^p - (x_j^p - x_i^p)y^p).$$

Примем закон распределения перемещений в виде

$$u^p = l_i^p u_i^p + 0v_i^p + l_j^p u_j^p + 0v_j^p + l_k^p u_k^p + 0v_k^p,$$

$$v^p = 0u_i^p + l_i^p v_i^p + 0u_j^p + l_j^p v_j^p + 0u_k^p + l_k^p v_k^p,$$

или в матричной форме

$$\left\{ \begin{matrix} u^p \\ v^p \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} l_i^p & 0 & l_j^p & 0 & l_k^p & 0 \\ 0 & l_i^p & 0 & l_j^p & 0 & l_k^p \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u_i^p \\ v_i^p \\ u_j^p \\ v_j^p \\ u_k^p \\ v_k^p \end{matrix} \right\},$$

$$\text{где } [F^p] = \begin{bmatrix} l_i^p & 0 & l_j^p & 0 & l_k^p & 0 \\ 0 & l_i^p & 0 & l_j^p & 0 & l_k^p \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$[B^p] = [L][F^p] = \frac{1}{2S^p} \begin{bmatrix} y_j^p - y_k^p & 0 & y_k^p - y_i^p & 0 & y_i^p - y_j^p & 0 \\ 0 & x_k^p - x_j^p & 0 & x_i^p - x_k^p & 0 & x_j^p - x_i^p \\ x_k^p - x_j^p & y_j^p - y_k^p & x_i^p - x_k^p & y_k^p - y_i^p & x_j^p - x_i^p & y_i^p - y_j^p \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Видно, что это выражение не зависит от переменных координат x^p , y^p . Поэтому в (2.12)

его можно вынести за знак интеграла. Получим

$$[K^p] = [B^p]^T [D^p][B^p] \int_V dV = S^p h^p [B^p]^T [D^p][B^p].$$

Здесь h^p - толщина элемента.

Матрица жесткости треугольного конечного элемента имеет размерность 6×6 .

2.4. Определение приведенной внешней нагрузки

Пусть

$$\{Q_i^p\} = - \int_V [B^p]^T [D^p] \{\varepsilon_i^p\} dV - \text{приведенные к узлам температурные нагрузки,}$$

$$\{Q_V^p\} = - \int_V [F^p]^T \{P_V^p\} dV - \text{приведенные к узлам объемные нагрузки,}$$

$$\{Q_S^p\} = - \int_S [F^p]^T \{P_S^p\} dS - \text{приведенные к узлам поверхностные нагрузки.}$$

Поскольку $[B^p]^T$ можно вынести за знак интеграла,

$$\begin{aligned} \{Q_i^p\} &= -[B^p]^T [D^p] \{\varepsilon_i^p\} S^p h^p = -[B^p]^T S^p h^p \frac{E^p}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha^p T^p \\ \alpha^p T^p \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= -S^p h^p \frac{E^p}{1-\mu^2} [B^p]^T \begin{Bmatrix} (1+\mu)\alpha^p T^p \\ (1+\mu)\alpha^p T^p \\ 0 \end{Bmatrix} = -S^p h^p \alpha^p T^p \frac{E^p}{1-\mu} [B^p]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= -h^p \alpha^p T^p \frac{E^p}{2(1-\mu)} \begin{Bmatrix} y_j^p - y_k^p \\ x_k^p - x_j^p \\ y_k^p - y_i^p \\ x_i^p - x_k^p \\ y_i^p - y_j^p \\ x_j^p - x_i^p \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для расчета объемной нагрузки умножим $[F^p]^T$ на $\{P_V^p\}$.

$$[F^p]^T \{P_V^p\} = \begin{Bmatrix} l_i^p P_{xV}^p \\ l_i^p P_{yV}^p \\ l_j^p P_{xV}^p \\ l_j^p P_{yV}^p \\ l_k^p P_{xV}^p \\ l_k^p P_{yV}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_i^p P_V^p \\ l_j^p P_V^p \\ l_k^p P_V^p \end{Bmatrix}.$$

Таким образом, объемная нагрузка складывается из трех, приведенных к трем узлам элемента. Нагрузка, приведенная к узлу i , имеет вид:

$$\{Q_{iV}^p\} = - \int_V l_i^p \{P_V^p\} dV = -h^p \{P_V^p\} \int_S l_i^p dS = -h^p \{P_V^p\} \left(\int_{x_i^p \varphi_1}^{x_i^p \varphi_2} \left(\int_{x_k^p \varphi_1}^{x_j^p \varphi_3} l_i^p dy \right) dx + \int_{x_k^p \varphi_1}^{x_j^p \varphi_3} \left(\int_{x_i^p \varphi_1}^{x_i^p \varphi_2} l_i^p dy \right) dx \right) \quad (2.16),$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ - функции, определяющие границы элемента. Это уравнения прямых, которые легко найти по координатам узлов (рис. 7).

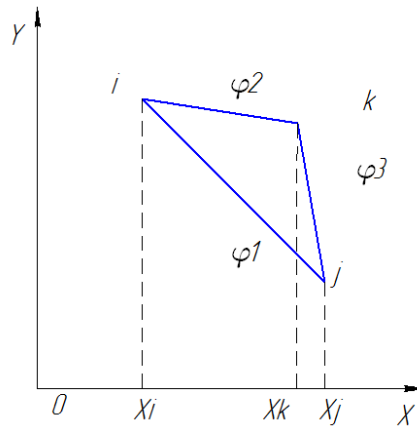


Рис. 7. Пределы интегрирования по конечному элементу

Объемная нагрузка, приведенная к узлам j и k , определяется аналогично. Так же определяется и поверхностная нагрузка, приведенная к узлам элемента.

2.5. Переход в глобальную систему координат

Обычно локальная система координат располагается так, чтобы было удобно вычислить матрицу жесткости элемента и векторы приведенной к узлам нагрузки. Но после их вычисления необходимо перейти в единую глобальную систему координат.

Поскольку в ранее рассмотренные уравнения входят не координаты, а их разности, параллельный перенос начала координат их не изменяет. Имеет значение только поворот системы координат. Пусть локальная система координат повернута относительно глобальной на угол β^p (рис. 8).

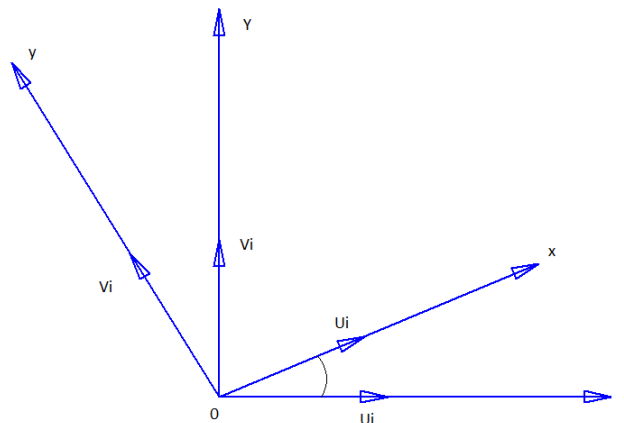


Рис. 8. Поворот системы координат

Спроектируем перемещения в локальной системе координат на оси глобальной системы. Получим перемещения в глобальной системе:

$$u_{gi}^p = u_i^p \cos \beta^p - v_i^p \sin \beta^p ,$$

$$v_{gi}^p = u_i^p \sin \beta^p + v_i^p \cos \beta^p ,$$

или в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} u_{gi}^p \\ v_{gi}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta^p & -\sin \beta^p \\ \sin \beta^p & \cos \beta^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^p \\ v_i^p \end{Bmatrix} ,$$

$$\text{или } \{q_{gi}^p\} = [R_{xy}^p] \{q_i^p\} .$$

Аналогично определяются перемещения в глобальной системе координат узлов j и k .

Для элемента в целом

$$\begin{Bmatrix} q_{gi}^p \\ q_{gj}^p \\ q_{gk}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xy}^p & 0 & 0 \\ 0 & R_{xy}^p & 0 \\ 0 & 0 & R_{xy}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i^p \\ q_j^p \\ q_k^p \end{Bmatrix},$$

или

$$\{q_g^p\} = [R^p] \{q^p\}.$$

Аналогично можно получить выражения для перехода в глобальную систему координат для вектора узловых реакций

$$\{N_g^p\} = [R^p] \{N^p\}$$

и вектора приведенных к узлам нагрузок

$$\{Q_g^p\} = [R^p] \{Q^p\}$$

Для получения в глобальной системе координат матрицы жесткости элемента, умножим (2.6) слева на $[R^p]$, а одно из слагаемых еще на единичную матрицу.

$$[R^p] \{N^p\} = [R^p] [K^p] [I] \{q^p\} + [R^p] \{Q^p\},$$

$$\{N_g^p\} = [R^p] [K^p] [R^p]^{-1} [R^p] \{q^p\} + \{Q_g^p\},$$

$$\{N_g^p\} = [R^p] [K^p] [R^p]^{-1} \{q_g^p\} + \{Q_g^p\}.$$

Таким образом, при переходе в глобальную систему координат матрица жесткости изменяется следующим образом:

$$[K_g^p] = [R^p] [K^p] [R^p]^{-1}$$

2.6. Формирование разрешающей системы линейных уравнений

Запишем в глобальной системе координат для элемента p :

$$\{N_g^p\} = [K_g^p] \{q_g^p\} + \{Q_g^p\}.$$

Векторы $\{N_g^p\} = \begin{Bmatrix} N_{gi}^p \\ N_{gj}^p \\ N_{gk}^p \end{Bmatrix}$, $\{Q_g^p\} = \begin{Bmatrix} Q_{gi}^p \\ Q_{gj}^p \\ Q_{gk}^p \end{Bmatrix}$. Тогда

$$\{N_{gi}^p\} = [K_{gi}^p] \{q_g^p\} + \{Q_{gi}^p\}, \quad (2.17)$$

где матрица $[K_{gi}^p]$ включает 1 и 2 строки матрицы $[K_g^p]$. Аналогично

$$\{N_{gj}^p\} = [K_{gj}^p] \{q_g^p\} + \{Q_{gj}^p\}$$

(матрица $[K_{gj}^p]$ включает 3 и 4 строки матрицы $[K_g^p]$),

$$\{N_{gk}^p\} = [K_{gk}^p] \{q_g^p\} + \{Q_{gk}^p\}$$

(матрица $[K_{gk}^p]$ включает 5 и 6 строки матрицы $[K_g^p]$).

Пусть в узле i взаимодействуют элементы m , n , p . Так как сплошность в этом узле не нарушается, уравнение совместности деформаций имеет вид:

$$\{q_i^p\} = \{q_i^n\} = \{q_i^m\} = \{q_i\}.$$

С учетом этого, уравнение (2.17) примет вид:

$$\{N_{gi}^p\} = [K_{gi}^p] \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \end{Bmatrix} + \{Q_{gi}^p\}$$

Разобьем $[K_{gi}^p]$ на три квадратные матрицы и запишем это уравнение в виде

$$\{N_{gi}^p\} = [K_{gii}^p]\{q_i\} + [K_{gij}^p]\{q_j\} + [K_{gik}^p]\{q_k\} + \{Q_{gi}^p\}.$$

Добавим в это уравнение векторы перемещений всех узлов с коэффициентами

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \{N_{gi}^p\} &= [N]\{q_i\} + \dots + [K_{gii}^p]\{q_i\} + \dots + [K_{gij}^p]\{q_j\} + \dots + [K_{gik}^p]\{q_k\} + \dots + [N]\{q_{n_r}\} + \{Q_{gi}^p\} = \\ &= [N, \dots, K_{gii}^p, \dots, K_{gij}^p, \dots, K_{gik}^p, \dots, N]\{q\} + \{Q_{gi}^p\} = [T_{gi}^p]\{q\} + \{Q_{gi}^p\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\{q\}$ - вектор перемещений всех узлов.

Получим аналогичные уравнения для всех узлов. Разрешающая система формируется на основании условия равновесия конструкции, то есть для любого узла сумма реакций должна быть равна нулю.

$$\sum_{p=1}^{p=n_r} \{N_{g1}^p\} = \sum_{p=1}^{p=n_r} [T_{g1}^p]\{q\} + \sum_{p=1}^{p=n_r} \{Q_{g1}^p\} = 0$$

.....

$$\sum_{p=1}^{p=n_r} \{N_{gi}^p\} = \sum_{p=1}^{p=n_r} [T_{gi}^p]\{q\} + \sum_{p=1}^{p=n_r} \{Q_{gi}^p\} = 0$$

.....

$$\sum_{p=1}^{p=n_r} \{N_{gn_r}^p\} = \sum_{p=1}^{p=n_r} [T_{gn_r}^p]\{q\} + \sum_{p=1}^{p=n_r} \{Q_{gn_r}^p\} = 0$$

Это – система n_r линейных уравнений относительно n_r неизвестных. В матричной форме

$$[K]\{q\} = \{Q\},$$

где $[K]$ составлена из матриц $[T_{gi}^p]$, а $\{Q\} = \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{p=1}^{p=n_r} \{Q_{g1}^p\} \\ \dots\dots\dots \\ - \sum_{p=1}^{p=n_r} \{Q_{gn_r}^p\} \end{array} \right\}$. Решая эту систему, находим

вектор узловых перемещений, далее осуществляется переход к отдельным элементам, в которых определяются деформации и напряжения.

3. ОСОБЕННОСТИ И ПРОБЛЕМЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При практическом применении метода конечных элементов следует помнить о проблемах, связанных с точностью расчета и длительностью расчета.

Расчет тем точнее, чем меньше размер конечных элементов. При слишком больших конечных элементах результат может быть в принципе неверный, несмотря на правильно введенные данные и правильную работу программы. К сожалению, не существует метода, позволяющего заранее предсказать размер конечных элементов, достаточный для получения требуемой точности расчета.

Проверка точности расчета осуществляется при помощи повторного расчета с элементами, уменьшенными на 20...30 % относительно разбивки на конечные элементы в предыдущем расчете. Если результаты этих двух расчетов отличаются менее, чем требуемая погрешность расчета, то можно считать, что расчет правилен в пределах требуемой погрешности. Если результаты этих расчетов отличаются более, необходимо уменьшать конечные элементы дальше, и трудно сказать, до каких пор.

Время расчета и необходимая память компьютера пропорциональны квадрату количества узлов, поэтому при уменьшении размера элементов (и, соответственно,

увеличении количества элементов и узлов) может возникнуть ситуация, когда будет недостаточно ресурсов компьютера или ответ получается за чрезмерно долгое время.

Возможные способы экономии времени и памяти для расчета:

1. Применение неравномерной разбивки на конечные элементы. Элементы должны быть меньше в местах концентрации напряжений, приложения сосредоточенных сил, точечных закреплений. В других местах детали элементы могут быть несколько больше без ущерба для точности расчета.

2. Расчет части симметричной детали (сегмента диска, половины или даже четверти автомобильного поршня и так далее). Отброшенные части детали учитываются в виде граничных условий.

3. Применение конечных элементов возможно более простого типа.

Матрица жесткости конечного элемента имеет размерность, равную квадрату произведения количества узлов элемента на количество степеней свободы узла. Так, балочный конечный элемент имеет 2 узла, каждый из них – только 1 степень свободы, таким образом, размерность матрицы жесткости балочного конечного элемента $[(2 \times 1) \times (2 \times 1)] = [2 \times 2]$. Четырехугольный оболочечный конечный элемент имеет 4 узла, каждый из них – 2 степени свободы, таким образом, размерность матрицы жесткости такого конечного элемента $[(4 \times 2) \times (4 \times 2)] = [8 \times 8]$. Объемный (твердотельный) конечный элемент в виде куба имеет 8 узлов, каждый из них – 3 степени свободы, таким образом, размерность матрицы жесткости такого конечного элемента $[(8 \times 3) \times (8 \times 3)] = [24 \times 24]$.

Рассмотрим расчет балки, изображенной на рис. 9.

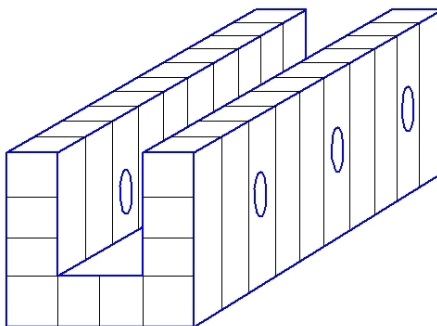


Рис. 9. Пример применения различных типов конечных элементов для расчета балки

Примем вначале, что в балке нет отверстий. Если для ее расчета используются балочные конечные элементы, и их 10 по длине балки, все матрицы жесткости будут включать $10 \times [2 \times 2] = 40$ чисел. Если для расчета балки применить кубические конечные элементы, потребуется 10 элементов в каждом сечении, 10 по длине балки, и все матрицы жесткости будут содержать $10 \times 10 \times [24 \times 24] = 57600$ чисел. Видно, что в данном случае применение объемных конечных элементов существенно увеличивает объем вычислений и является нерациональным.

Однако при наличии отверстий применение балочных конечных элементов невозможно, так как ряд сечений балки не является непрерывными. В этом случае применение объемных конечных элементов не просто рационально, но является единственным способом решения задачи. Балочные конечные элементы также не позволяют находить значение перерезывающих напряжений и ряда других факторов.

Поэтому следует применять конечные элементы настолько простого типа, как только возможно, но если упрощение невозможно, применять другие способы (в данном случае, например, рассчитать половину балки).

Ряд погрешностей метода конечных элементов связан с переходом от сплошной среды к отдельным конечным элементам. Наиболее очевидная из них – превращение всех

кривых в ломаные. Рассмотрим более сложную погрешность, связанную с приведением к узлам распределенной нагрузки.

Пусть лопатка (рис. 10) разделена для простоты на 4 конечных элемента, имеет одинаковую толщину во всех сечениях и не закручена. Пусть она нагружена только центробежной силой, причем высота лопатки значительно меньше, чем расстояние до оси вращения. При таких допущениях центробежная сила в каждой точке лопатки почти одинакова, и при ее приведении к узлам конечных элементов распределяется равномерно по узлам. Таким образом, суммарная сила в каждом узле разбивки получается кратной количеству элементов, в которые этот узел входит. Если разбивка такова, как на рис. 10, слева, то в левом нижнем углу приведенная сила оказывается вдвое меньше, чем в правом нижнем. Так как оба узла закреплены, это скажется на реакциях и напряжениях в этих узлах. В левом верхнем узле сила, наоборот, вдвое больше, чем в правом верхнем, в результате лопатка будет иметь перекося в правую сторону. При другой разбивке, как на рис. 10, справа, перекося будет уже в левую сторону. В реальности этого перекося нет ни в ту, ни в другую сторону, есть только удлинение лопатки.

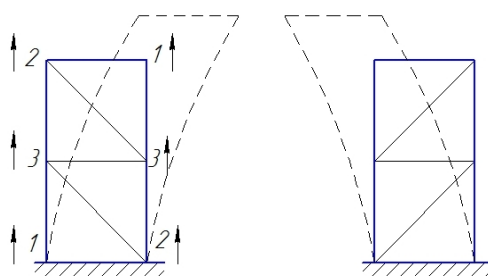


Рис. 10. Пример погрешности при приведении к узлам распределенной нагрузки

Погрешности разбивки можно уменьшить, уменьшая размер конечных элементов, но это ведет к увеличению времени расчета и необходимой памяти компьютера, кроме того, эти погрешности никогда не устранимы полностью.

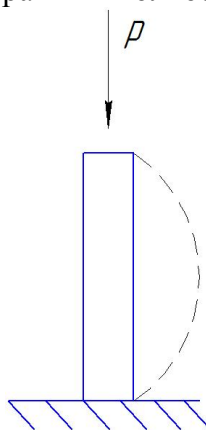


Рис. 11. Потеря устойчивости стержня

Метод конечных элементов, как и многие другие численные методы, плохо находит особые точки, связанные с неустойчивым равновесием, разрывами функции и т.д. Пример такого случая – потеря устойчивости стержня, нагруженного сжимающей силой. Метод конечных элементов будет определять напряжения сжатия в стержне. Между тем, как известно из курса сопротивления материалов, стержень потеряет устойчивость, прогнется в некотором случайном направлении и сломается при напряжении, значительно меньшем, чем предел прочности на сжатие.

Результаты расчета методом конечных элементов трудно обозреть. Не видно, от каких параметров зависит результат, и насколько сильно. Неясно, что именно и насколько

следует изменить для улучшения результата. Ответить на эти вопросы при помощи метода конечных элементов можно только посредством нового расчета с иными данными. Изменение данных приходится осуществлять во многом вслепую, что неэффективно.

Между тем, по аналитическому уравнению, даже если оно получено с большими допущениями, хорошо виден физический смысл процесса и переменные, от которых зависит результат.

Также аналитическое уравнение легко дифференцируемо при поиске минимума или максимума в задачах оптимизации. Найти минимум или максимум при помощи численного метода – сложная и объемная вычислительная задача.

Приближенный быстрый расчет по аналитическому уравнению позволяет также проверить реальность результатов, полученных методом конечных элементов, установить наличие каких-либо грубых ошибок, если они есть.

Таким образом, можно сделать вывод, что численный метод конечных элементов и аналитические методы дополняют друг друга. Метод конечных элементов целесообразно использовать для точного окончательного расчета, для численного эксперимента, заменяющего натурный. Аналитические уравнения целесообразно применять для понимания физического смысла процесса, для приближенных предварительных расчетов и для приближенного контроля численного метода.